Lema 1.2. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa $\sigma-$ algebrom i $f : X \to \mathbf{R}$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) f je merljiva.

(ii) Za svako $a \in \mathbf{R}$ je $\{x \in X : \; f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.

(iii) Za svako $a \in \mathbf{R}$ je $\{x \in X : \; f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$.

(iv) Za svako $a \in \mathbf{R}$ je $\{x \in X : \; f(x) < a\} \in \mathcal{M}$.

(v) Za svako $a \in \mathbf{R}$ je $\{x \in X : \; f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$.

Dokaz: Jasno, tvrđenja (ii) i (v) su ekvivalentna, jer su skupovi dati u njima međusobno komplementarni. Na isti način možemo zaključiti i da su tvrđenja (iii) i (iv) ekvivalentna.

Dokažimo sada ekvivalentnost (ii) i (iii). Neka važi (ii). Tada je

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \{x \in X : f(x) > a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}.$$

Slično, ako pretpostavimo da važi (iii), tada (ii) sledi na osnovu osobina $\sigma-$ algebre i relacije

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{x \in X : f(x) \geq a + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}.$$

Dakle, uslovi (ii)–(v) su svi međusobno ekvivalentni.

Dokažimo sada na primer da je (i) ekvivalentno sa (ii). Pretpostavimo da je funkcija f merljiva. Tada je $\{x \in X : \; f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{M}$, jer je $(a, +\infty)$ otvoren u $\mathbf{R}$. Obratno, neka su svi skupovi oblika kao u (ii) merljivi. Tada, na osnovu ekvivalentnosti uslova, merljivi su i skupovi oblika kao u (ii)–(v). Kako se svaki otvoren skup u $\mathbf{R}$ može prikazati kao najviše prebrojiva unija otvorenih intervala $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ (a čije inverzne slike sve pripadaju $\mathcal{M}$, sledi da je f merljiva. ■

Opštiji oblik ove leme biće dat u Teoremi 1.5.

Teorema 1.2. Neka su $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbf{R}$ otvoreni skupovi, $(X, \mathcal{M})$ prostor sa $\sigma-$ algebrom i neka su $u : X \to \Omega_1$, $v : X \to \Omega_2$, merljive funkcije. Neka je $\phi : \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega \to \mathbf{C}$ neprekidna funkcija. Tada je preslikavanje $F : X \to \mathbf{C}$, $x \mapsto F(x) = \phi(u(x), v(x))$ merljivo.

Dokaz: Neka je $f : X \to \Omega$ definisano sa $f(x) := (u(x), v(x))$. Tada važi $F = \phi \circ f$. Treba dokazati da je f merljiva. Tada na osnovu Teoreme 1.1 sledi da je F merljiva funkcija. Neka je $\Pi = (a, b) \times (c, d)$ proizvoljan (otvoreni)